



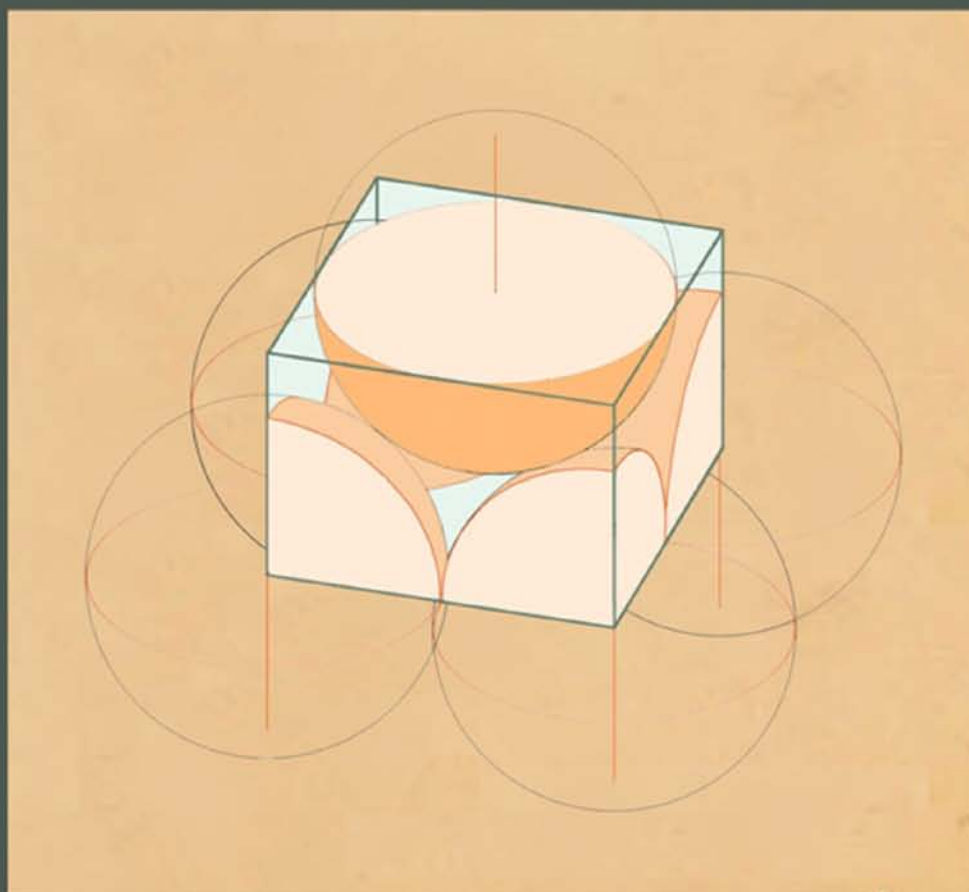
ISTITUTO INTERNAZIONALE STUDI AVANZATI DI
SCIENZE DELLA RAPPRESENTAZIONE DELLO SPAZIO
Geometria proiettiva, Geometria descrittiva, Rilevamento, Fotogrammetria

INTERNATIONAL INSTITUTE FOR ADVANCED STUDIES OF
SPACE REPRESENTATION SCIENCES
Projective geometry, Descriptive geometry, Survey, Photogrammetry

Palermo, Italia

Giuseppe Maria Catalano

DIMOSTRAZIONE GEOMETRICA PROIETTIVA
DELLA CONGETTURA DI KEPLERO SULLA
MASSIMA DENSITA' DI UN AGGREGATO DI SFERE



DIMOSTRAZIONE GEOMETRICA PROIETTIVA
DELLA CONGETTURA DI KEPLERO
SULLA MASSIMA DENSITA' DI UN AGGREGATO DI SFERE

Giuseppe Maria Catalano

2011

La congettura di Keplero era considerata fino ad oggi uno dei grandi problemi matematici irrisolti. Nel 1900 David Hilbert la incluse nella sua lista di ventitré problemi non risolti della matematica.

La congettura riguarda la massima densità di un aggregato di sfere di ugual diametro nello spazio euclideo. Essa afferma che non esiste alcun modo di sistemare delle sfere nello spazio con densità superiore a quella dell'aggregato secondo reticolo cubico a facce centrate (Fig. 1), poco superiore a quella dell'aggregato esagonale (Fig. 2). La densità di questi due modi di sistemare le sfere è leggermente maggiore del 74%.

Keplero iniziò a studiare le sistemazioni di sfere nel 1606 in seguito a uno scambio di corrispondenza con il matematico e astronomo inglese Thomas Harriot, che aveva avuto assegnato da Sir Walter Raleigh il problema di determinare il modo migliore per sistemare le palle di cannone sui ponti delle sue navi. Harriot aveva pubblicato nel 1591 uno studio di diversi metodi di accatastamento e aveva proseguito i suoi studi cercando di sviluppare una delle prime teorie atomiche.

Keplero, che stava formulando le leggi sul movimento dei pianeti, enunciò la congettura nel 1611 (1).

La dimostrazione può avere implicazioni profonde, quali, ad esempio, l'organizzazione dei dati all'interno dei computer, portando a mezzi di codifica più efficienti e a trasmissioni di informazioni più accurate.

Della questione si occuparono numerosi importanti matematici Blichfeldt, Gauss, Lagrange, Minkowski, Thue.

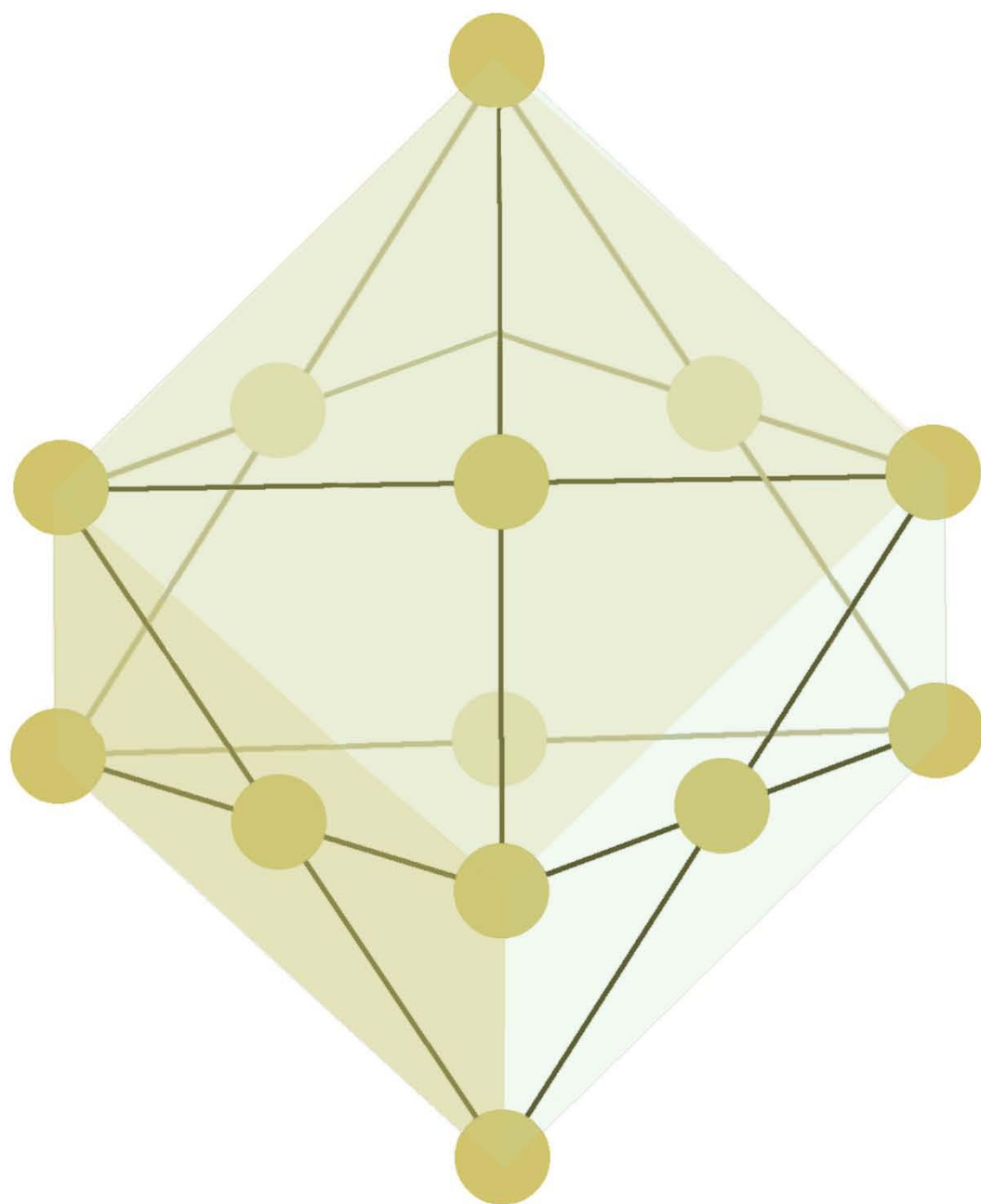


Fig. 1 Schema cristallografico secondo reticolo cubico a facce centrate.

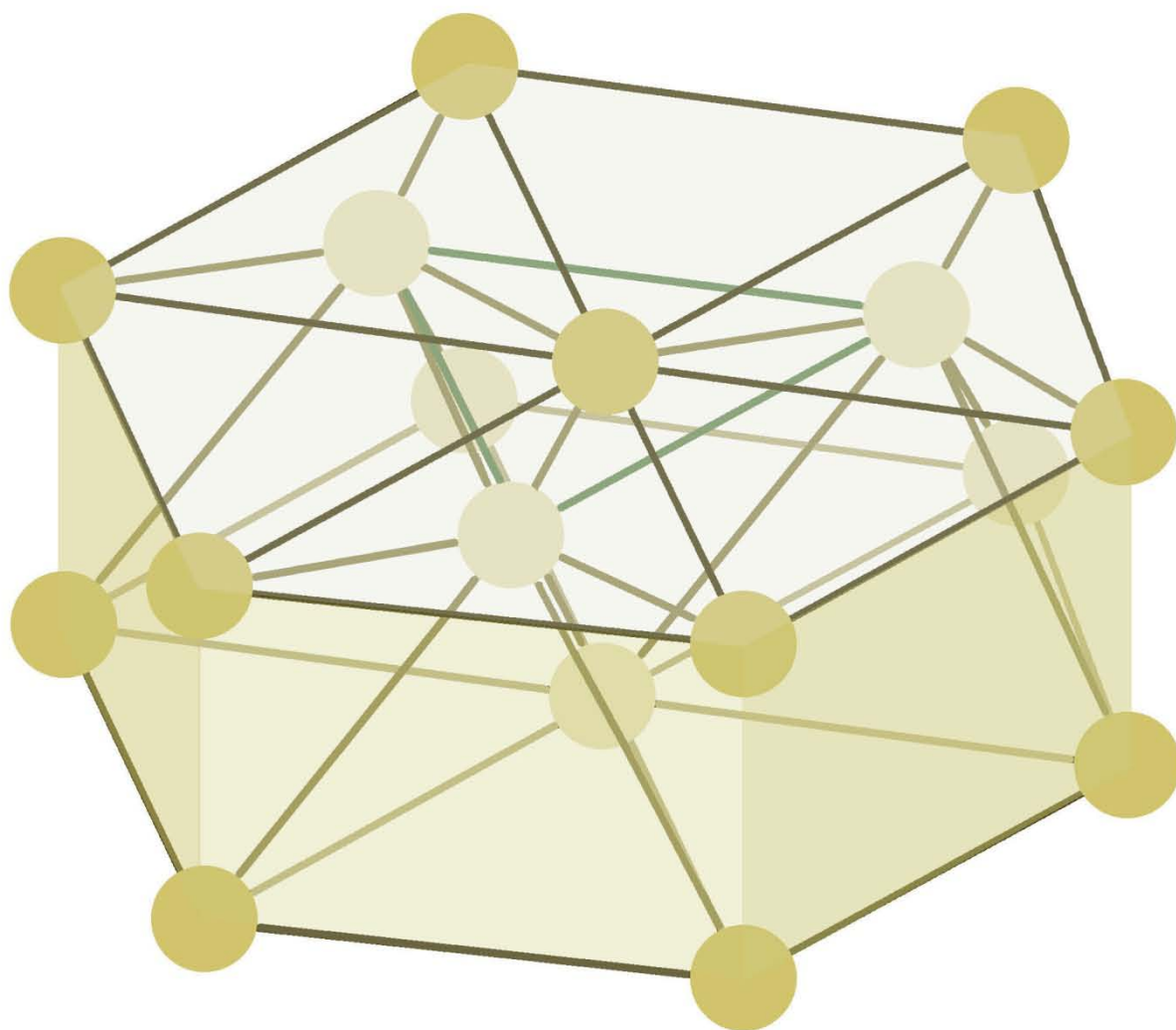


Fig.2 Schema cristallografico a reticolo esagonale.

Carl Friedrich Gauss dimostrò la congettura matematicamente nel 1831, per distribuzione regolare, quando cioè le sfere sono sistemate secondo un reticolo regolare, ma non per distribuzione qualsiasi.

Il matematico ungherese László Fejes Tóth nel 1953 mostrò che il problema di determinare la massima densità di tutte le disposizioni, regolari ed irregolari, di sfere poteva essere ridotto a un numero finito, per quanto molto grande, di calcoli. Questo significava che era possibile, almeno in linea di principio, trovare una dimostrazione per esaurimento. Un computer sufficientemente potente avrebbe potuto fornire un approccio pratico alla risoluzione del problema.

Nel frattempo vennero fatti altri tentativi per trovare un estremo superiore per la densità di un qualunque impacchettamento di sfere.

Seguendo l'approccio suggerito da Fejes Tóth, il matematico Thomas Hales dell'Università del Michigan (2), determinò che la massima densità di tutti gli impacchettamenti poteva essere trovata minimizzando una funzione di centocinquanta variabili. Nel 1992, assistito dal suo studente laureato Samuel Ferguson, diede inizio a un programma di ricerca per applicare sistematicamente i metodi della programmazione lineare alla ricerca di un limite inferiore per il valore di questa funzione relativo a un insieme di più di cinquemila differenti configurazioni di sfere. Se, per ognuna di queste configurazioni, fosse riuscito a trovare un limite inferiore che fosse maggiore del valore relativo all'impacchettamento cubico, allora la congettura di Keplero sarebbe stata dimostrata. La ricerca di tutte queste limitazioni inferiori avrebbe richiesto la soluzione di circa centomila problemi di programmazione lineare.

Nel 1998 Hales annunciò che la dimostrazione era completa. A quell'epoca consisteva di oltre duecentocinquanta pagine di annotazioni e tre gigabyte di programmi per computer, dati e risultati.

La parte teorica venne accettata da *Annals of Mathematics* nel 2003. Dopo quattro anni di lavoro, la commissione di dodici esperti capeggiata da Gábor Fejes Tóth, figlio di Laszlo, diede il via libera alla pubblicazione. Gli aspetti computazionali (algoritmi e quant'altro) vennero pubblicati invece su *Discrete and Computational Geometry*.

All'epoca i revisori dissero che erano sicuri solo al novantanove per cento della correttezza della dimostrazione, dato che era stata eseguita con l'aiuto di un computer e riempiva oltre trecento pagine. Nel 1965 Laszlo Toth aveva predetto che un giorno i computers avrebbero permesso di risolvere la Congettura di Keplero. Ma la comunità mondiale dei matematici non era e non è concorde sulla validità di dimostrazioni conseguite con l'aiuto del computer, valide al novantanove per cento (3).

Nel 2003 Hales pubblicò un articolo di cento pagine che descriveva nel dettaglio la parte non svolta al computer della sua dimostrazione e annunciò l'inizio di un progetto avente lo scopo di rimuovere qualsiasi incertezza residua

sulla validità della dimostrazione, creando una dimostrazione che possa essere verificata da programmi di controllo automatico di dimostrazioni, come il HOL (higher order logic) theorem prover. Il progetto di Hales fu chiamato Project Flyspeck (macchiolina di mosca), dove FPK sono le iniziali di Formal Proof of Kepler, dimostrazione formale di Keplero. A tal proposito Hales stimò che con il Flyspeck Project ci sarebbero voluti una ventina di anni per completare la dimostrazione.

Il teorema che si va ad enunciare dimostra non solo la validità della congettura di Keplero, ma ancora una volta la semplicità, la brevità e l'eleganza delle soluzioni fornite dalla geometria proiettiva rispetto alle gigantesche, complicate, per molti inaccettabili vie seguite dal calcolo.

TEOREMA SULLA MASSIMA DENSITÀ MEDIA SPAZIALE DI UN AGGREGATO DI SFERE DI UGUALE DIAMETRO

L'aggregato di sfere di uguale diametro che ha maggiore densità media nello spazio è quello secondo reticolo cubico a facce centrate.

Si considerino in proiezione ortogonale otto sfere di un aggregato illimitato aventi centri in $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8$, vertici di un romboedro di lato d , con la faccia C_1, C_2, C_3, C_4 appartenente al quadro. Si assuma tale romboedro quale cella dell'aggregato, porzione cioè dell'aggregato tale da riempire, per traslazione e accostamento di infinite simili, la totalità dello spazio.

Si consideri all'inizio la forma del romboedro, indicata dall'apice I, con le diagonali minori pari a d e quindi le sfere disposte secondo reticolo esagonale (Fig. 4).

L'altezza h^I della cella, espressa dalla quota di C_5 rispetto al quadro, si ottiene ribaltando sul quadro il piano per C_1 e C_5^I ortogonale al quadro. La circonferenza di centro C_1 e raggio d interseca la proiettante per C_5^I , ribaltata, in (C_5^I) estremo di (h^I) (Fig. 3).

Se si spostano le sfere mantenendo i centri vertici del romboedro, sino a che questo assuma, nella forma II, base quadrata (Fig. 5), descrivendo il centro C_5 sul piano ortogonale al segmento $C_1 C_2$ per il suo punto medio M la circonferenza η avente centro in quest'ultimo (Fig. 3), l'altezza h della relativa cella, ottenuta come prima, muta sino al valore h^{II} , corrispondente al reticolo cubico a facce centrate.

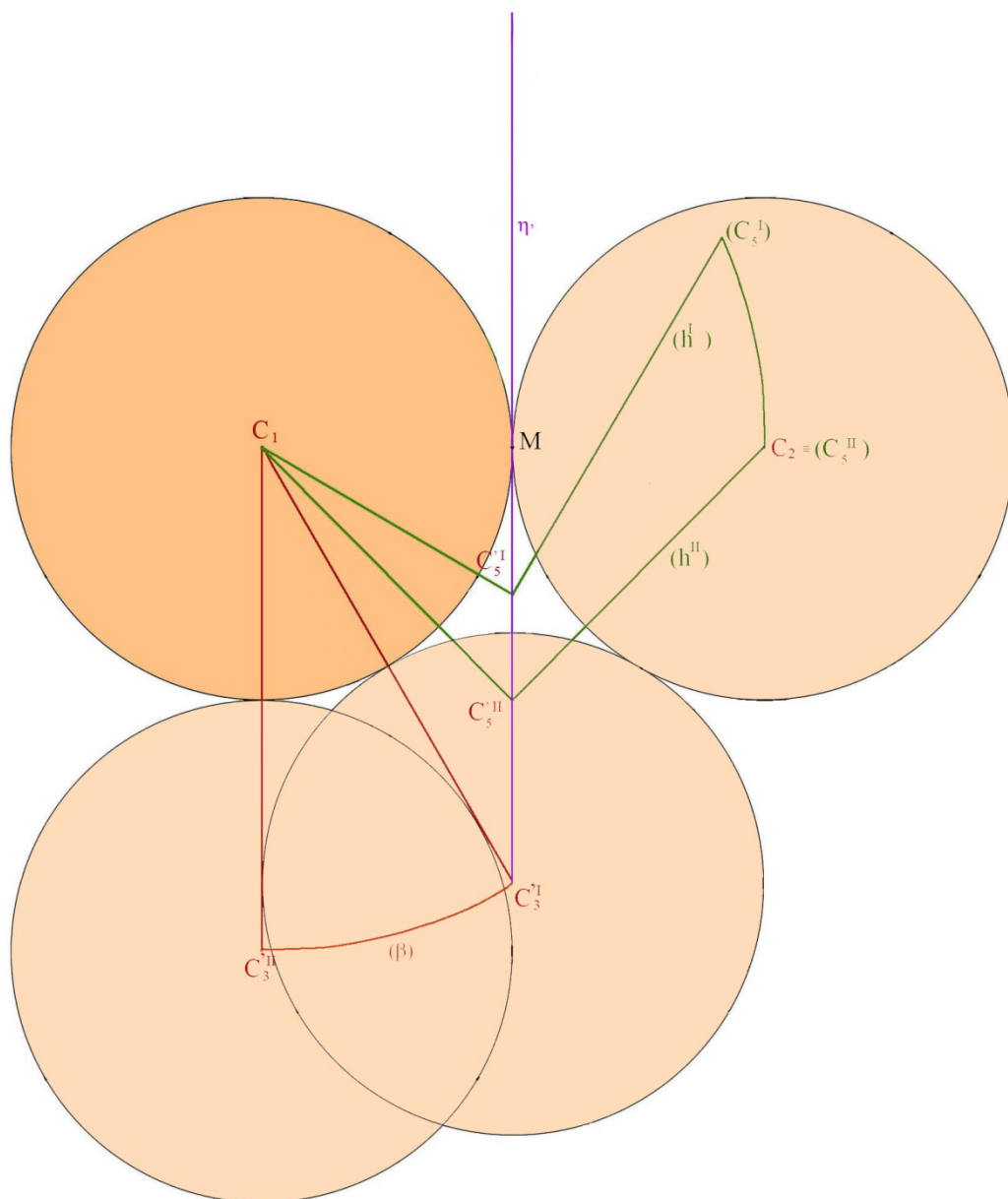


Fig. 3 L'altezza h^I della cella, espressa dalla quota di C_5 rispetto al quadro, si ottiene ribaltando sul quadro il piano per C_1 e C_5^I ortogonale al quadro. La circonferenza di centro C_1 e raggio d interseca la proiettante per C_5^I , ribaltata, in (C_5^I) estremo di (h^I) .

Se si spostano le sfere mantenendo i centri vertici del romboedro, sino a che questo assuma, nella forma II, base quadrata (Fig. 5), descrivendo il centro C_5 sul piano ortogonale al segmento $C_1 C_2$ per il suo punto medio M la circonferenza \mathbb{K} avente centro in quest'ultimo, l'altezza h della relativa cella, ottenuta come prima, muta sino al valore h^{II} , corrispondente al reticolo cubico a facce centrate.

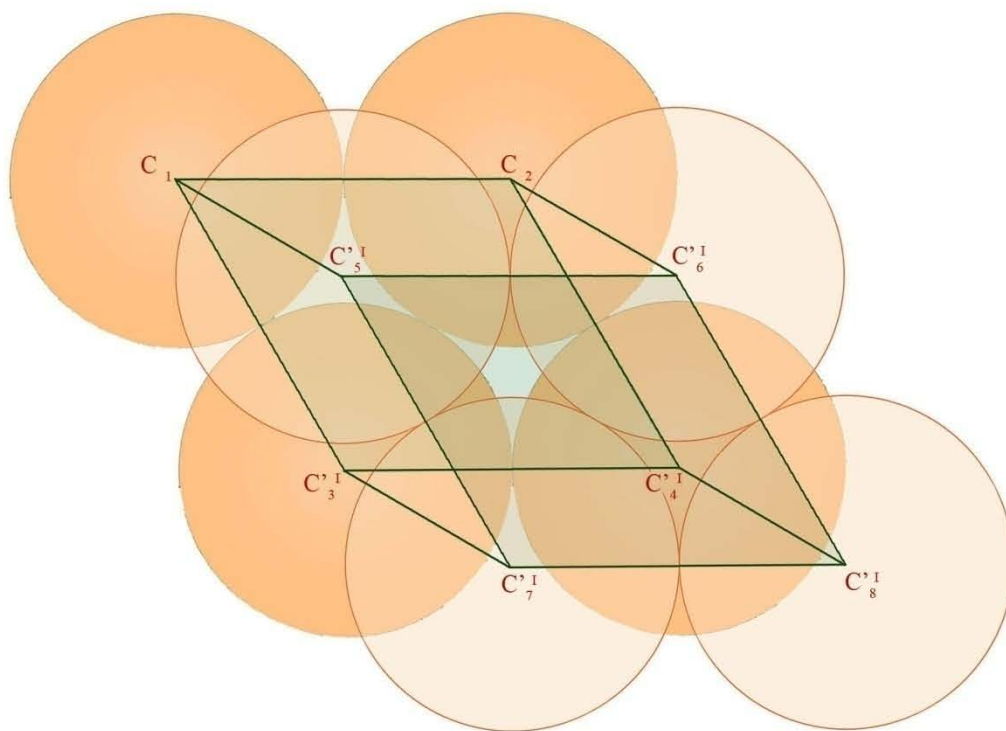


Fig. 4 In verde è velata la cella romboedrica dell'aggregato secondo reticolo esagonale.

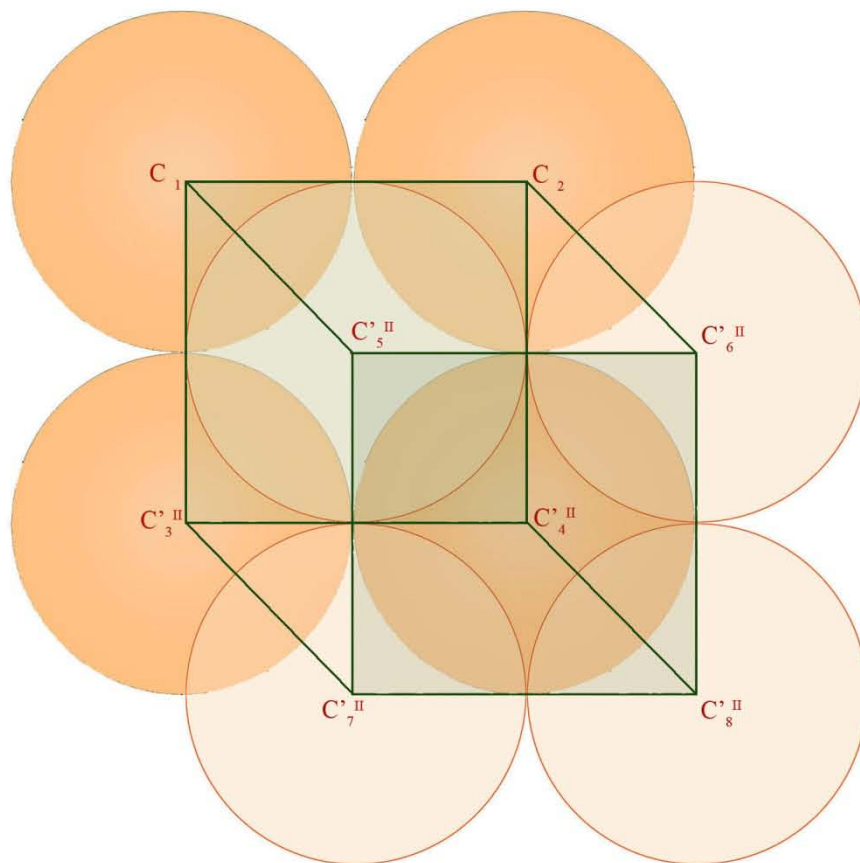


Fig. 5 In verde è velata la cella romboedrica dell'aggregato secondo reticolo cubico a facce centrate.

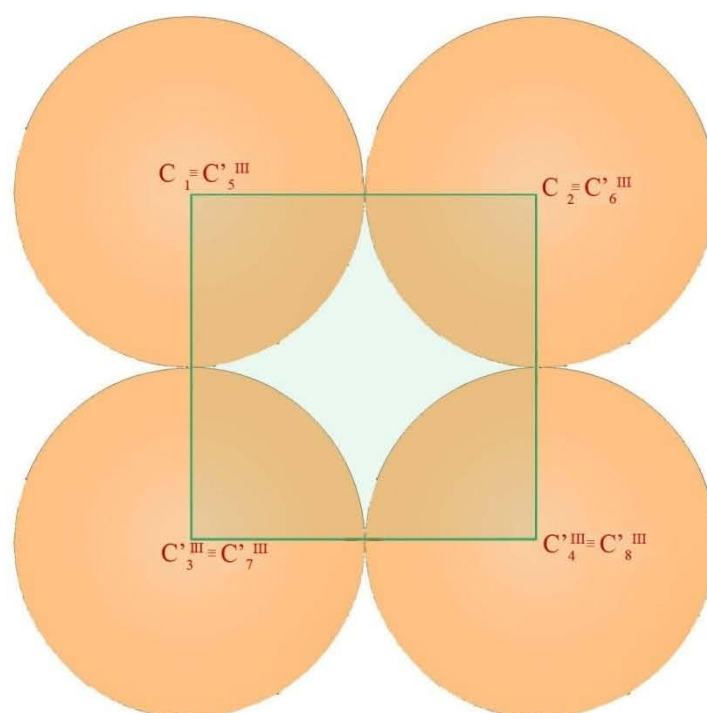


Fig. 6 In verde è velata la cella cubica dell'aggregato secondo reticolo cubico.

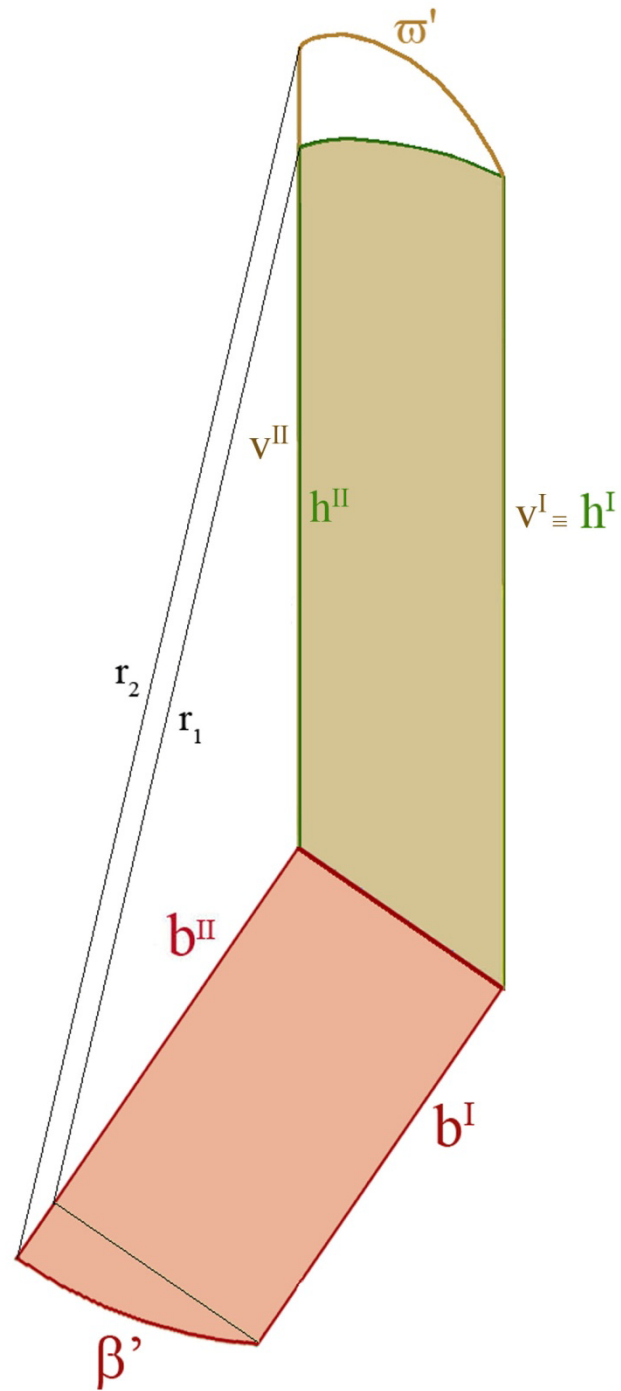


Fig. 7 In proiezione obliqua a 45° sono rappresentati i segmenti h e b compresi tra le forme I e II e la nota trasformazione che, mantenendo l'equivalenza delle aree dei rettangoli di altezza h e base b , riporta le altezze alla base b^I costante. I segmenti v che ne derivano, descritti dalla curva ω , forniscono, a meno di d e b^I , il volume delle celle.

Tutte le possibili forme assunte dal romboedro, escludendo la compenetrazione tra sfere, sono comprese tra la forma I, in cui l'angoloide interno in C_1 , assume il valore minimo e la forma III, in cui il romboedro assume la forma cubica e l'angoloide interno in C_1 il valore massimo, poiché ulteriori ampliamenti di questo riprodurrebbero forme del solido già comprese fra le precedenti.

Spostando le sfere dalle forme I, II o intermedie, sino alla III, si ottiene sempre, qualunque sia la traiettoria, un aumento di h , restando immutata la base, poiché h , sempre pari alla quota di C_5 rispetto al quadro, cresce sino a $h^{III} = d$ (Fig. 6), appartenendo C_5 alla sfera di centro C_1 e raggio d .

Si badi che qualsiasi cella romboedrica di lato d contiene nel complesso tutto e solo il volume di una sfera, come si evince considerando che gli otto angoloidi interni alla cella sono espressi dagli otto angoloidi al vertice comune di otto celle.

Se poi un vertice della cella, rimanendo centro di sfera, si sposta in un punto esterno al romboedro, la porzione di sfera interna al romboedro necessariamente diminuisce e dunque la porzione di sfera del romboedro risulta inferiore all'unità. Se ne trae che la presenza di celle non romboedriche fa diminuire la densità media dell'aggregato.

Per quanto esposto la massima densità è compresa tra le forme I e II della cella.

Il rapporto tra il volume della sfera e il volume della cella fornisce la densità dell'aggregato.

Il volume della cella è proporzionale all'altezza h della cella e, a meno di $2d$, all'altezza b del triangolo $C_1 C_2 C'_5$ pari ad un quarto della base della cella (Fig. 3).

L'estremo C_5 muta nello spazio dalla forma I alla II descrivendo la circonferenza η , l'estremo C'_5 di b descrive sul quadro la circonferenza β avente centro in M e raggio pari a MC_1 , essendo il triangolo $C_1 C_2 C'_5$ sempre rettangolo con ipotenusa in $C_1 C_2$.

Se dunque consideriamo i rettangoli di base b e altezza h e operiamo la nota trasformazione che, mantenendo l'equivalenza delle aree, riporta le altezze alla base b^I costante, i segmenti v che ne derivano, descritti dalla curva ϖ (Fig. 7), forniscono, a meno di $2d$ e b^I , il volume delle celle.

Si dimostra così che il volume minimo v^{II} corrisponde alla cella dell'aggregato secondo reticolo cubico a facce centrate, che dunque presenta la massima densità, leggermente superiore a quella della cella esagonale di volume v^I .

NOTE

(1) Così scrive Keplero a proposito di una questione riguardante la disposizione delle palle di cannone: " In generale quando palle uguali vengono raccolte in un qualunque contenitore esse si dispongono in due modi diversi, secondo i due modi in cui le si può disporre nel piano.

Se palle uguali sono sparse nello stesso piano orizzontale e le si spinge l'una contro l'altra così strettamente che si toccano l'un l'altra, esse si disporranno a triangolo oppure a quadrato.

Nel primo caso sei palle ne circondano una, nel secondo quattro. Complessivamente ciò accade per tutte le palle eccetto quelle più esterne. Con una disposizione pentagonale non si può mantenere l'uniformità.

Una disposizione esagonale si spezza in una triangolare. Così restano da descrivere solo due disposizioni.

Ora, se si procede ad accumulare dei corpi solidi più strettamente possibile e si avvanza strato per strato, le palle avranno o una disposizione quadrata oppure triangolare.

Se quadrata, o una palla superiore poggia su una immediata inferiore, oppure ogni singola palla superiore si accomoderà tra quattro di quelle inferiori. In quest'ultimo modo ogni palla è toccata da quattro vicine nello stesso piano e da una sopra e una sotto, e così via e ognuna è toccata da sei altre. La disposizione sarà cubica, e se schiacciate le palle diventeranno dei cubi. Ma questa non sarà la disposizione più compatta. Nel secondo modo, non solo ogni palla è toccata dalle sue quattro vicine, ma anche da quattro di sotto e quattro di sopra e così in tutto una è toccata da 12, e sotto pressione le palle sferiche diventeranno dei romboidi.

Questo arrangiamento sarà il più compatto possibile così che in nessuna altra disposizione si potrà mettere un maggior numero di palle nello stesso contenitore."

(2) Thomas Hales, *A proof of the Kepler Conjecture*, 2003.

(3) George Szpiro, giornalista scientifico svizzero del *Neue Zürcher Zeitung* e autore del libro, *Kepler's conjecture* (John wiley & Sons, 2003), racconta: "I controllori delle riviste, per verificare il lavoro di Hales, hanno visto che non bastava sottomettere i dati al programma che aveva scritto lo stesso Hales. Occorreva prima assicurarsi che i software utilizzati realizzassero perfettamente i compiti per i quali erano stati concepiti. Ma è impossibile verificare tutte le linee di programma scritte e tutti i dati immessi e la loro elaborazione. Perché è una massa mostruosa di dati. Alla fine, si è deciso di fare solo controlli di coerenza".

E' stata così messa in piedi una macchina gigantesca, fatta da decine di controllori, di seminari, di verifiche delle ipotesi e delle logiche messe in campo. Ma il risultato non è andato al di là della frase "siamo sicuri al 99% che la dimostrazione è valida".